Θέμα [redacted] 06-11-17

## Άσκηση SOS!

πλήθος καθηγητών

| Σχολή | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ≥7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 50 | 60 | 80 | 100 | 100 | 100 |
| 2 | 20 | 70 | 90 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 3 | 40 | 60 | 80 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |

Οι θέσεις αντιστοιχούν στις σχολές.

### Φάση 4

$r_4(m_4)$

| $x_4$ \ m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $f^*(x_4)$ | $m_4^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | | | | | | | 10 | 1 |
| 2 | 10 | 20 | | | | | | 20 | 2 |
| 3 | 10 | 20 | 30 | | | | | 30 | 3 |
| 4 | 10 | 20 | 30 | 40 | | | | 40 | 4 |
| 5 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | | | 50 | 5 |
| 6 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | | 60 | 6 |
| 7 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 70 | 7 |

### Φάση 3

| $x_3$ \ $m_3$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 40+10 | | | | | | |
| 3 | 40+20 | 60+10 | | | | | |
| 4 | 40+30 | 60+20 | 80+10 | | | | |
| 5 | 40+40 | 60+30 | 80+20 | 100+10 | | | |
| 6 | 40+50 | 60+40 | 80+30 | 100+20 | 100+10 | | |
| 7 | 40+60 | 60+50 | 80+40 | 100+30 | 100+20 | 100+10 | |
| 8 | 40+70 | 60+60 | 80+50 | 100+40 | 100+30 | 100+20 | 100+1 |

| $f_3^*(x_3)$ | $m_3$ |
|---|---|
| 50 | 1 |
| 70 | 2 |
| 90 | 3 |
| 110 | 4 |
| 120 | 4 |
| 130 | 4 |
| 140 | 4 |

**Aşama 2** $\quad r_2(m_2) + f_2(x_2 - m_2)$

| $x_2 \backslash m_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 20+50 | | | | | |
| 4 | 20+70 | 70+50 | | | | |
| 5 | 20+90 | 70+70 | 90+50 | | | |
| 6 | 20+110 | 70+90 | 90+70 | 100+50 | | |
| 7 | 20+120 | 70+110 | 90+90 | 100+70 | 100+50 | |
| 8 | 20+130 | 70+120 | 90+110 | 100+90 | 100+70 | 100+50 |
| 9 | 20+140 | 70+130 | 90+120 | 100+110 | 100+90 | 100+70 |

| | 7 | $f_2^*(x_2)$ | $m_2$ |
|---|---|---|---|
| 3 | | 70 | 1 |
| 4 | | 120 | 2 |
| 5 | | 140 | 3 |
| 6 | | 160 | 2 n 3 |
| 7 | | 180 | 2 n 3 |
| 8 | | 200 | 3 |
| 9 | 100+50 | 210 | 3 n 4 |

Φάση 1

$r_1(m_1)+l_1(x_1-m_1)$

| $x_1 \backslash m_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $f_1^*(x_1)$ | $m_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 25+140 | 50+200 | 60+180 | 80+160 | 100+140 | 100+120 | 100+100 | 250 | 2 |

• Περιπτώσεις Δυναμικού προγραμματισμού

# Προγραμματισμός εργατικού δυναμικού

• $x_i$: μέγεθος εργατικού δυναμικού
και $b_i$ $i=1,\dots n$

Έχουμε • κόστος διατήρησης του εργατικού δυναμικού $c_1(x_i-b_i)$ με $x_i \geq b_i$
• κόστος πρόσληψης -11- $c_2(x_i-x_{i-1})$, $x_i > x_{i-1}$

• Φάση: $i$ εβδομάδα

• Εναλλακτική απόφαση στη φάση $i$: $x_i$

• κατάσταση στη φάση $i$: $x_{i-1}$

→ $f_{n+1}(x_n)=0$

→ $f_i(x_{i-1}) = \min_{\boxed{x_i \geq b_i}} \{ c_1(x_i-b_i) + c_2(x_i-x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i) \}$ $i=1,\dots n$

↳ Είναι ο περιορισμός μας ∇

η μεταβλητή απόφασης: ο αριθμός των υπαλλήλων που πρέπει να πάρω
η μεταβλητή κατάστασης: οι υπάλληλοι που απαιτούνταν την προηγούμενη εβδομάδα

°• Σχόλιο ∇

## # παράδειγμα #

Έστω ότι έχω 5 εβδομάδες
5, 7, 8, 4, 6 (υπαλλήλους)
$b_1$ $b_2$ $b_3$ $b_4$ $b_5$

Φάση θεωρώ την κάθε εβδομάδα. Έχω 5 εβδ. Άρα 5 φάσεις

°• Σχόλιο ∇

$c_1(x_i-b_i) = 3(x_i-b_i)$, με $x_i \geq b_i$

$c_2(x_i-x_{i-1}) = 4+2(x_i-x_{i-1})$ με $x_i > x_{i-1}$

Φάση 5

προηγούμενη εβδομάδα

$x_5=6$ → έχω στην 5η εβδομάδα ότι ζητώ 6 υπαλλήλους

| $x_4$ | $x_5=6$ | βέλτιστη λύση (min) $f_5(x_4)$ | $x_5^*$ |
|---|---|---|---|
| 4 → πήρα 4 στην 4η και ζητώ 2 στην 5η | $3\cdot0+4+2\cdot(2) = 3(6-6)+4+2\cdot(6-4)$ | 8 | 6 |
| 5 | $3\cdot0+4+2\cdot1$ | 6 | 6 |
| 6 ↳ πήρα κατευθείαν 6 | $3\cdot0+\boxed{0}+0$ | 0 | 6 |

$x_5=6$
$b_5=6$
$x_4$: 4, 5, 6

5 πήρα 5 στην 4η εβδομάδα και ζητώ 1 υπάλληλο στην 5η

## Φάση 4

αλλάζω την κατάσταση με απόφαση

Παρατήρηση:

| | $x_4=4$ | $x_4=5$ | $x_4=6$ | $f_4^*(x_3)$ | $x_4^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_3=8$ | $3\cdot 0+0+8$ | $3\cdot 1+0+6$ | $3\cdot 0+0+0$ | 6 | 6 |

## Φάση 3

| | $x_3=8$ | $f_3^*(x_2)$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|
| $x_2=7$ | $3\cdot 0+4+2(1)+6$ | 12 | 8 |
| $x_2=8$ | $3\cdot 0+0+6$ | 6 | 8 |

## Φάση 2

| $x_1$ | $x_2=7$ | $x_2=8$ | $f_2^*(x_1)$ | $x_2^*$ |
|---|---|---|---|---|
| 5 | $3\cdot 0+4+2\cdot 2+12$ | $3\cdot 1+4+2\cdot 3+6$ | 19 | 8 |
| 6 | $3\cdot 0+4+2\cdot 1+12$ | $3\cdot 1+4+2\cdot 2+6$ | 17 | 8 |
| 7 | $3\cdot 0+0+12$ | $3\cdot 1+4+2\cdot 1+6$ | 12 | 7 |
| 8 | $3\cdot 0+0+12=12$ | $3\cdot 1+0+6=9$ | 9 | 8 |

## Φάση 1

| $x_0$ | $x_1=5$ | $x_1=6$ | $x_1=7$ | $x_1=8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $3\cdot 0+4+2\cdot 5+19$ $=33$ | $3+4+2\cdot 6+17$ $=36$ | $3\cdot 2+4+2\cdot 7+12$ $=36$ | $3\cdot 3+4+2\cdot 8$ $+9$ |

| $f_1^*(x_0)$ | $x_1^*$ |
|---|---|
| 33 | 5 |

**Συνολικό κόστος: 33**

□

# Πρόβλημα αντικατάστασης εργαλείων ή εξοπλισμού

Έστω ότι έχω ένα εργαλείο ή εξοπλισμό και το θέλω ώστε να το χρησιμοποιήσω για τις επόμενες $t$ περιόδους.

- $k(t)$: το κόστος χρήσης του εργαλείου για μια χρονική περίοδο όταν αυτό είναι ηλικίας $t$.
- $\pi(t)$: η τιμή πώλησης του εργαλείου τη χρονική στιγμή $t$ όταν είναι ηλικίας $t$.
- $a(t)$: η τιμή ανταλλαγής του εργαλείου ηλικίας $t$ (με ένα καινούριο)
- $A$: η τιμή αγοράς ενός νέου εργαλείου
- Φάση: η χρονική στιγμή $i$
- Εναλλακτική απόφαση: κρατώ / αντικαθιστώ (αγοράζω)
- κατάσταση για φάση $i$: είναι η ηλικία του εργαλείου τη χρονική στιγμή $i$
- Αντικειμενική συνάρτηση $f_n(t)$: ελάχιστο κόστος χρήσης από τη χρονική στιγμή $n$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t$, δοθέντος ότι τη χρονική στιγμή $n$ το εργαλείο είναι ηλικίας $t$.

→ $A - a(t) + k(0)$ (αγοράζω)

→ $A - a(t) + k(0) + f_{n+1}(1)$

→ $k(t) + f_{n+1}(t+1)$

- Άρα, η αναδρομική σχέση είναι η εξής:

$$\boxed{f_n(t) = \min\{\underbrace{A - a(t) + k(0) + f_{n+1}(1)}_{\text{αντικαθιστώ}},\ \underbrace{k(t) + f_{n+1}(t+1)}_{\text{κρατώ}}\}}$$

Η οριακή συνθήκη είναι:

$$\boxed{f_T(t) = -\pi(t)}$$

# Παράδειγμα

Έστω ότι έχω ένα εργαλείο. είδος χρόνου $A = 70$

| t | k(t) | a(t) | π(t) |
|---|---|---|---|
| 0 | 5 | | |
| 1 | 10 | 55 | 45 |
| 2 | 15 | 40 | 40 |
| 3 | 20 | 30 | 30 |
| 4 | 25 | 20 | 15 |
| 5 | 30 | 10 | 10 |
| 6 | 35 | 2 | 2 |

σε κάθε φάση το κόστος εξαρτάται από το πόσο έχω το εργαλείο

σχόλιο!

## Φάση 4

$f_4(1) = -45 \quad f_4(2) = -40 \quad f_4(3) = -30$

$f_4(4) = -15 \quad f_4(5) = -10 \quad f_4(6) = -2$

## Φάση 3

$f_3(1) = \min\{A - a(1) + k(0) + f_4(1),\ k(1) + f_4(2)\}$

$= \min\{-25, -\underline{30}\} = -\underline{30}$. Συνεπώς, κρατώ.

$f_3(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_4(1),\ k(2) + f_4(3)\}$

$= \min\{-10, -\underline{15}\} = -\underline{15}$. Συνεπώς, κρατώ.

$f_3(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_4(1),\ k(3) + f_4(4)\}$

$= \min\{\boxed{0}, 5\} = \boxed{0}$ Συνεπώς, $\boxed{\text{αντικαθιστώ}}$.

$f_3(4) = \min\{A - a(4) + k(0) + f_4(1),\ k(4) + f_4(5)\}$

$= \min\{\boxed{10}, 15\} = \boxed{10}$. Συνεπώς, $\boxed{\text{αντικαθιστώ}}$.

$f_3(5) = \min\{A - a(5) + k(0) + f_4(1),\ k(5) + f_4(6)\}$

$= \min\{\boxed{20}, 30\} = \boxed{20}$. Συνεπώς, $\boxed{\text{αντικαθιστώ}}$.

## Φάση 2

$f_2(1) = \min\{A - a(1) + k(0) + f_3(1),\ k(1) + f_3(2)\}$
$= \min\{\underline{-10}, -5\} = \underline{-10}$. Συνεπώς, αγοράζω

$f_2(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_3(1),\ k(2) + f_3(3)\}$
$= \min\{\underline{5}, 15\} = \underline{5}$. Συνεπώς, αγοράζω

$f_2(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_3(1),\ k(3) + f_3(4)\}$
$= \min\{\underline{15}, 30\} = \underline{15}$. Συνεπώς, αγοράζω.

$f_2(4) = \min\{A - a(4) + k(0) + f_3(1),\ k(4) + f_3(5)\}$
$= \min\{\underline{25}, 45\} = \underline{25}$. Συνεπώς, αγοράζω.

ΑΓΟΡΑΖΩ ≡ ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩ
&
παρατήρηση

## Φάση 1

$f_1(1) = \min\{A - a(1) + k(0) + f_2(1),\ k(1) + f_2(2)\}$
$= \min\{\underline{10}, 15\} = \underline{10}$, Συνεπώς, αγοράζω.

$f_1(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_2(1),\ k(2) + f_2(3)\}$
$= \min\{\underline{35}, 45\} = \underline{35}$. Συνεπώς, αγοράζω.

$f_1(3) = \min\{A - a(3) + k(0) + f_2(1),\ k(3) + f_2(4)\}$

* * * *

$f_0(2) = \min\{A - a(2) + k(0) + f_1(1),\ k(2) + f_1(3)\} =$
$= \min\{\underline{45}, 50\} = \underline{45}$. Συνεπώς, αγοράζω

- **Πως μπορώ να τα γράφω πιο συνοπτικά.**

Φάση 3

| t | Αντικαθιστώ (Αγοράζω) | Κρατώ | $f_3(1)$ βέλτιστη λύση (min) | Αποφασίζω |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $A - a(1) + k(0) + f_4(1) = -25$ | $k(1) + f_4(2) = -30$ | $-30$ | Κρατώ |
| 2 | $A - a(2) + k(0) + f_4(1) = -10$ | $k(2) + f_4(3) = -15$ | $-15$ | -//- |
| 3 | $A - a(3) + k(0) + f_4(1) = 0$ | $k(3) + f_4(4) = 5$ | $0$ | Αντικαθ. |
| 4 | $A - a(4) + k(0) + f_4(1)$ | $k(4) + f_4(5)$ | $10$ | Αντικαθισ. |
| 5 | $A - a(5) + k(0) + f_4(1)$ | $k(4) + f_4(6)$ | $20$ | -//- |

## Φάση 2

| t | Αντικαθιστώ | Κρατώ | $f_2(1)$ | Αποφασίζω |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $A-a(1)+k(0)+f_3(1)=-10$ | $k(1)+f_3(2)=-5$ | $-10$ | Αντικαθιστώ |
| 2 | $A-a(2)+k(0)+f_3(1)=5$ | $k(2)+f_3(3)=15$ | 5 | Αντικαθιστώ |
| 3 | $A-a(3)+k(0)+f_3(1)=15$ | $k(3)+f_3(4)=30$ | 15 | Αντικαθιστώ |
| 4 | $A-a(4)+k(0)+f_3(1)=25$ | $k(4)+f_3(5)=45$ | 25 | Αντικαθιστώ |

## Φάση 1

| t | Αντικαθιστώ | Κρατώ | $f_1(t)$ | Αποφασίζω |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $A-a(1)+k(0)+f_2(1)$ | $k(1)+f_2(2)=15$ | 10 | Αντικαθιστώ |
| 2 | $A-a(2)+k(0)+f_2(1)$ | $k(2)+f_2(3)=30$ | 25 | -//- |
| 3 | $A-a(3)+k(0)+f_2(1)$ | $k(3)+f_2(4)=50$ | 45 | -//- |

| t | Αντικαθιστώ | Κρατώ | $f_0(t)$ | Αποφας |
|---|---|---|---|---|
| 2 | $A-a(2)+k(0)+f_1(1)=45$ | $k(2)+f_1(3)=50$ | 45 | Αντικαθιστώ |

□

* —— * —— * —— *

**Παραλλαγή του παραπάνω προβλήματος.**

Αντί να αγοράσω έναν εξοπλισμό ή ένα εργαλείο, μπορώ να το νοικιάσω.

Ορίζω

$E$: το κόστος ενοικίασης του εργαλείου για μια χρονική περίοδο.

$f_n(t)$: το ελάχιστο κόστος "χρήσης" του εργαλείου από τη χρονική στιγμή $n$ μέχρι τη χρονική στιγμή $T$, δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή $n$ το εργαλείο είναι ηλικίας $t$.

$F(n)$: το ελάχιστο κόστος χρήσης του εργαλείου από τη χρονική στιγμή $n$ μέχρι τη χρονική στιγμή $T$ δεδομένου ότι την προηγούμενη χρονική περίοδο είχαμε νοικιασμένο εργαλείο.

$\rightsquigarrow A - a(t) + k(0) + f_{n+1}(t)$ $\rightsquigarrow k(t) + f_{n+1}(t+1)$

$\rightsquigarrow -\pi(t) + \varepsilon + k(0) + F(n+1)$

Συνεπώς

$$\boxed{f_n(t) = \min\{A - a(t) + k(0) + f_{n+1}(t),\ k(t) + f_{n+1}(t+1),\ -\pi(t) + \varepsilon + k(0) + F(n+1)\}}$$

• Έχω δύο αποφάσεις ΑΓΟΡΑΖΩ ή ΚΡΑΤΑΩ ΤΟ ΝΟΙΚΙΑΣΜΕΝΟ

$A + k(0) + f_{n+1}(t)$ $\varepsilon + k(0) + F(n+1)$

Συνεπώς

$$\boxed{F(n) = \min\{A + k(0) + f_{n+1}(1),\ \varepsilon + k(0) + F(n+1)\}}$$

$\rightsquigarrow f_T(t) = -\pi(t)$ $\rightsquigarrow F(T) = 0$

# Άσκηση

για 4 χρόνια

$A(n) = 50 + 5n$ με $n = 0, 1, 2, 3$ (αγοράζω)

$\varepsilon(n) = 10 + 3n$ με $n = 0, 1, 2, 3$ (ενοικίαση)

$k(t) = 5 + 5t$ με $t = 0, 1, 2, 3$ (κόστος χρήσης για ένα χρόνο του μηχανήματος ηλικίας (t))

$\pi(t) = 45 - 6t$ με $t = 0, 1, 2, 3$ (τιμή πώλησης μηχανήματος ηλικίας t)

$a(t) = 55 - 5t$ με $t = 0, 1, 2, 3$ (τιμή ανταλλαγής μηχανήματος ηλικίας t)

με $f_4(1) = f_4(2) = f_4(3) = f_4(4) = 0$ $F(4) = 0$

Τι απόφαση πρέπει να πάρει;